



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** Analyse fonctionnelle

## Thème

---

### Sur les particuliers opérateurs homogènes sommables

---

Présenté par :

*M<sup>r</sup> AKEDI Khaled*

Soutenu publiquement le : 30/06/2019.

Devant le jury composé de :

**Président :** *M<sup>r</sup> SAADI Khalil*

**Encadreur :** *M<sup>r</sup> TLAIBA Abdelmoumen*

**Examineur :** *M<sup>r</sup> HERYAIZ Tofik*

PROF, Université de M'sila

M.C.A, Université de M'sila

M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

---

# Remerciements

---

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur A. TIAIBA pour leur intéressante proposition du sujet. Egalement a lui tous mes reconnaissant car il ma accorée leur confiance.

J'exprime aussi ma profonde gratitude à Monsieur S. KHALIL pour m'avoir fait l'honneur de présider mon juré. Et à Monsieur T. HERAIZ qui a accepter d'examiner mon travail.

Je n'oublie pas de remercier tout mes professeurs et toutes les personnes qui sont un jour de prés ou de loin contribuer l'aboutissement de mes études et de ma mémoire de la fin étude.

A la fin tous ca et grâce au fatigues des deux plus chère au monde ma mère et mon père. Je sait pas est ce qu'il a des mots qui peut exprimer mes remerciements mais merci Ma mère merci mon père.

---

# Dédicaces

---

Ce mémoire est destiné à la fois à mon père et à ma mère, ainsi qu'à tous mes frères et amis et à tous ceux qui m'ont soutenu au travers d'un sourire et nous souhaitons une bonne réunion. Merci.

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>L'espace de Banach réticulé</b>	<b>1</b>
1.1	Préliminaires . . . . .	2
1.2	Les opérateurs linaires et Idéal et homomorphisme . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Les opérateurs sous-linéaires positifs p-régulier</b>	<b>6</b>
2.1	Les opérateurs homogènes . . . . .	7
2.1.1	Les opérateurs positivement homogènes . . . . .	7
2.1.2	Les opérateurs sous-linéaires . . . . .	8
2.1.3	Les relations entre les opérateurs sous-linéaires et les opérateurs linéaires	11
2.1.4	Les opérateurs sous-linéaire p-convexe et p-concave . . . . .	13
2.2	Les opérateurs sous-linéaires positifs . . . . .	13
2.3	Les opérateurs sous-linéaires positifs p-régulier . . . . .	16
2.4	Les opérateur sous-linaires positifs fortement p-sommants . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Les opérateurs sous-linéaires positifs Cohen p-Nucléaire</b>	<b>19</b>
3.1	Les opérateurs sous-linéaires Cohen p-Nucléaires . . . . .	20
3.1.1	Les opérateur sous-linaires positif p-sommants . . . . .	20
3.1.2	les opérateurs sous-linaires positif p-Nucléaires . . . . .	20
3.2	Application . . . . .	25

---

# Introduction générale

---

Où voulu dans ce travail de prendre en étude, la sommabilité l'un des classe, des opérateurs qui est la des opérateurs homogènes, qui sont les opérateurs qui vérifient que

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Sauf on veut pas voir le type classiques qui sont les linéaire, mais on ait dans autre cas particulièrement le cas des sous- linéaires. Aussi il a plusieurs sens de sommabilité pour ce la on a préféré le cas d'opérateurs Cohen p-Nucléaires, où on vas franchement lire et détaillé un article publier en (2016) par monsieur A. Belacel [6] intitulé : "**On The Cohen p-Nuclear Positive Sub-linear Operators**".

On commence par un petit entrer au concept d'opérateur Cohen p- Nucléaires :

Soit  $X$  un espace de Banach, et  $X^*$  est le dual topologique de  $X$  dont la boule unité fermé ( $B_X$ ), et soit  $E$  un espace de Banach réticulé, et  $E^+$  le cône positive dans  $E$ .

Si on considèrent que  $X, Y$  deux espaces des Banach, et  $E, F$  deux espaces des Banach réticulés,  $L(X, Y)$  est l'espace de Banach, de tout les opérateurs linéaires continues de  $X$  dans  $Y$ . Pour  $1 \leq p < +\infty$  on a  $p^*$  la conjugué de  $p$  (i.e.,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ ).

On note pour d'opérateur Cohen p-Nucléaire pour ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) qui a été introduite par Cohen dans [9].

Soit  $u$  Un opérateur linéaire ente deux espaces des Banach  $X; Y$ ,  $u$  dit un opérateur Cohen p-Nucléaire, si pour  $1 < p < +\infty$  il existe une constante  $C$  telle que  $C > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$  ( $x_1 \dots x_n$ )  $\in X$  et ( $y_1 \dots y_n$ )  $\in Y$ . On a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle u(x_i), y_i^* \rangle \right| \leq C \left[ \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |x_i(x^*)|^p d\mu_1(X^*) \right)^{\frac{1}{p}} \right] \times \left[ \sup_{y \in B_Y} \left( \sum_{i=1}^n |y_i^*(y)|^{p^*} d\mu_2(Y) \right)^{\frac{1}{p^*}} \right].$$

La plus petite constante  $C$  qui vérifiée l'inégalité précédente on le note par  $\pi_p(u)$ .

Est appelé le Cohen p-nucléaire norme sur l'espace  $N_p(X, Y)$  de tous les opérateurs de Cohen p-nucléaires de  $X$  dans  $Y$  qui est un espace de Banach. Nous avons  $N_1(X, Y) = \pi_1(X, Y)$  (l'espace de Banach de tous les opérateurs 1-sommants) et  $N_\infty(X, Y) = D_\infty(X, Y)$  (l'espace de Banach de tous les opérateurs fortement  $\infty$ -sommants)

Dans [[9], **Théorème 2.3.2**], Cohen prouve que, si  $u$  vérifie le théorème de domination alors  $u$  est p-nucléaire et il montre que ce théorème caractérise les opérateurs de p-nucléaires, Dans [12], Achour et la. Généralisent cette notion aux opérateurs sous-linéaires et ils ont donné un analogue au "théorème de domination de Pietsch".

Pour ce catégorie d'opérateurs. Motivés par cela, nous étudions cette notion avec les opérateurs sous-linéaires positive et nous proposons, un autres, analogue du théorème de domination de Pietsch pour ce type d'opérateurs est l'un des principaux résultats de ce mémoire et nous discutons également sur certaines propriétés concernant cette classe. Il reste pour prouver le théorème de factorisation de Pietsch.

Cet mémoire est organisé comme suit : Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions de bases et terminologies. Concernant les espaces de Banach. Nous rappelons également certaines notations standard. Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques définitions et propriétés concernant les opérateurs  $s$ -homogènes, les opérateurs  $p$ -nucléaire et les opérateurs sous-linéaires positifs. Nous donnons la définition des opérateurs  $p$ -sommants positifs introduite par Blasco [7], [8] et nous présentons la notion de sous-linéaire fortement  $p$ -sommant opérateurs initiés dans [12].

Dans la dernier chapitre, nous donnons le résultat de A. Belacel [6] qui est la généralisons la classe des opérateurs  $p$ -nucléaires de Cohen au positif opérateurs sous-linéaires.

Où on va voir que cette catégorie vérifier le théorème de domination, qui est le principal résultat de ce chapitre.

# L'ESPACE DE BANACH RÉTICULÉ

---

Dans ce chapitre, on va cité tous les éléments mathématiques que nous souhaitons de l'utilisé dans ce qui viennent de notre travail. comme certains définitions de base, théorèmes et les résultats concernant le sujet.. Pour plus d'informations consulté [6], [10], [14], [17].

## 1.1 Préliminaires

**Définition 1.1.** Un espace vectoriel  $E$  muni d'une relation d'ordre notée  $\leq$  est ordonné, si

$$\begin{aligned} (i) & \forall x \in E \quad x \leq x. \\ (ii) & \forall x, y, z \in E \quad x \leq y \text{ et } y \leq z \implies x \leq z. \\ (iii) & \forall x, y \in E \quad x \leq y \text{ et } y \leq x \implies x = y. \end{aligned}$$

**Définition 1.2.** Un espace vectoriel ordonné  $X$  la dont pour les quel toute paire d'éléments à une borne supérieur est appelé espace vectoriel réticulé, i.e.,

$$\forall x, y \in X, \sup(x, y) \in X \text{ et } \inf(x, y) \in X. \quad (1.1)$$

**Définition 1.3.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel ordonné,  $X$  est complètement réticulé, si

$$\forall A \in X \text{ tel que } A \neq \Phi \text{ } A \text{ majoré} \implies \sup(A). \quad (1.2)$$

**Définition 1.4.** Soit  $X$  un espace de Banach.  $X$  est un espace de Banach réticulé, Si  $X$  est réticulé et

$$\begin{cases} (i) \forall x \in X & ||x|| = |x|, \\ (ii) \forall x, y \in X & |x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|. \end{cases}$$

Notons que

$$\|x\| = \sup(x, -x) \text{ tel que } x = x^+ - x^- \text{ et } |x| = x^+ - x^-, \text{ ou } x^+ = \sup(x, 0) \text{ et } x^- = \sup(-x, 0).$$

tel que

$$\sup((x + z), (y + z)) = \sup(x, y) + z$$

Pour plus de détails voir [14] et [18].

**Exemple 1.1.** L'espace  $L_1([0, 1], \mu)$  est un espace de Banach réticulé .

Tout espace des Banach réticulé réflexif st un espace de Banach complètement réticulé .

**Remarque 1.1.**  $\mathbb{C}(k)$  L'espace des fonctions définies et continues sur un compact  $k$  a valeurs dans  $\mathbb{R}$  est un espace réticulé muni de l'ordre partiel définie par :

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in k. \quad (1.3)$$

*Démonstration.* On a  $\sup\{f, g\}(x) = \max(f(x), g(x))$  .

On montre que  $\sup(f, g)$  existe et appartient à  $\mathbb{C}(k)$ ,

$$\max(f, g) = \begin{cases} f(x) & f(x) > g(x), \\ g(x) & g(x) > f(x). \end{cases}$$



donc, est définie ,

Soit  $x_0 \in k$  ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sup \{f, g\} (x) = \sup \{f, g\} (x_0)$  ,

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & \text{si } f(x) > g(x) \text{ (au voisinage } x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), & \text{si } g(x) > f(x) \text{ (au voisinage } x_0). \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x_0), \\ g(x_0). \end{cases} \end{aligned}$$

En générale  $C(k)$  n'est pas complètement réticulé. □

**Proposition 1.1.** *Le dual  $X^{*1}$  d'un espace de Banach réticulé  $X$  est un espace de Banach complètement réticulé muni de l'ordre naturel,*

$$x_1^* \leq x_2^* \iff \langle x_1^*, x \rangle \leq \langle x_2^*, x \rangle \quad \forall x \in X^+. \quad (1.4)$$

On  $\langle, \rangle$  indique le crochet de dualité, et  $X^+$  l'ensemble des éléments positifs de  $X$ .

*Démonstration.* Nous allons esquisser la démonstration, nous définissons le cône positif dans  $X^*$  par

$$x^* > 0 \iff x^*(x) > 0 \quad \forall x \in X^+$$

Dans ce cas, il est facile de vérifier que pour tout  $x^*, y^*$  dans  $X^*$  et pour tout  $x > 0$ , on a

$$(x^* \cup y^*)(x) = \sup \{x^*(u) + y^*(x - u) : 0 \leq u \leq x\},$$

et

$$(x^* \cap y^*)(x) = \inf \{x^*(v) + y^*(x - v) : 0 \leq v \leq x\}.$$

De plus détails voir [14]. □

**Remarque 1.2.** Nous désignons par un sous-lattice d'un espace de Banach réticulé  $X$  le sous-espace linéaire  $E$  de  $X$ , tel que

$$\forall x, y \in E, \sup \{x, y\} \in E. \quad (1.5)$$

L'injection isométrique  $i : X \rightarrow X^{**}$  tel que

$$\langle i(x), x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle. \quad (1.6)$$

envoie  $X$  dans un sous-lattice de  $X^{**}$ . pour plus d'information si on considère  $X$  comme un sous-lattice de  $X^{**}$  pour tout  $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \leq x_2 \iff \langle x_1, x^* \rangle \leq \langle x_2, x^* \rangle \quad \forall x^* \in X_+^*. \quad (1.7)$$

On pourra consulter[14].

---

1. la dual topologie de  $X$   
2. la bidual topologie de  $X$

**Définition 1.5.** Soit  $X$  un espace de Banach réticule, et soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p < +\infty$ . On note par  $X(l_p^n)$  l'espace de suite d'éléments  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  muni de la norme

$$\begin{cases} \|x\|_{X(l_p^n)} &= \left\| \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty. \\ \|x\|_{X(l_{+\infty}^n)} &= \left\| \left( \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right) \right\| \quad \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

De plus l'espace  $X(l_p^n)$  équipé de l'ordre naturel,

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad \forall i. \quad (1.8)$$

Est un espace de Banach réticulé.

**Définition 1.6.** Soit  $X$  un espace de Banach et  $1 \leq p \leq +\infty$ . On note par  $l_p(X)$ <sup>3</sup> (resp.  $l_p^n(X)$ <sup>4</sup>) l'espace des suites  $(x_i)$  (resp.  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) dans  $X$  muni de la norme

$$\begin{aligned} \|x\|_{l_p(X)} &= \left\| \left( \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \\ (\text{resp } \|(x)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_p^n(X)} &= \left\| \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|). \end{aligned}$$

Et soit  $l_p^\omega(X)$ <sup>5</sup> (resp.  $l_p^{\omega n}(X)$ <sup>6</sup>) les espaces des suites  $(x_i)$  (resp.  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) dans  $X$  muni de la norme

$$\begin{aligned} \|x_i\|_{l_p^\omega(X)} &= \sup_{\|\phi\|_{X^*} \leq 1} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x_i, \phi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_p^{\omega n}(X)} &= \sup_{\|\phi\|_{X^*} \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n |\langle x_i, \phi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

**Corollaire 1.1.** Soient les résultats suivants :

- (1)  $l_p(X) = l_p^\omega(X)$  si  $1 \leq p < +\infty$  et  $\dim(X) < +\infty$ .
- (2)  $l_\infty(X) = l_\infty^\omega(X)$  si  $p = +\infty$ .
- (3)  $l_p^\omega(X) \equiv B(l_{p^*}, X)$  si  $1 < p \leq +\infty$  (isométriquement).
- (4)  $l_1^\omega(X) \equiv B(C_0, X)$  si  $p = 1$  (isométriquement),  
(tel que  $p^*$  la conjugué de  $p$ , i.e.,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ ).

- 
3.  $L_p(X) = \left\{ (x_i)_{i \geq 1} \mid \|(x_i)\|_{L_p(X)} < +\infty \right\}$ .
  4.  $L_p^n(X) = \left\{ (x_i)_{i \geq 1}^n \mid \|(x_i)\|_{L_p^n(X)} < +\infty \right\}$ .
  5.  $L_p^\omega(X) = \left\{ (x_i)_{i \geq 1} \mid \|(x_i)\|_{L_p^\omega(X)} < +\infty \right\}$ .
  6.  $L_p^{\omega n}(X) = \left\{ (x_i)_{i \geq 1}^n \mid \|(x_i)\|_{L_p^{\omega n}(X)} < +\infty \right\}$ .

## 1.2 Les opérateurs linaires et Idéal et homomorphisme

**Définition 1.7.** Soit  $T : X \rightarrow E$  un opérateur linéaire. On dit que  $T$  est un opérateur linéaire du rang fini. Si

$$\dim T(X) < +\infty.$$

**Définition 1.8.** Soient  $E$  un espace de Banach,  $X$  est un espace de Banach complètement réticulé. Un opérateur  $u \in B(E, X)$  est dit borné pour l'ordre, si  $u(B_X)$  est borné pour l'ordre dans  $X$ .

**Remarques 1.1.** ,

1. Soit  $v \in l_{p^*} \rightarrow X$  un opérateur linéaire et  $v(e_i) = x_i$ . Alors

$$\|v\| = \|x_n\|_{l_p^\omega},$$

( avec  $(e_i)_{i \geq 1}$  la base canonique de  $X$  , et  $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$  ).

2. Soit  $u \in B(E, X)$  un opérateur borné pour l'ordre on pose

$$j(u) = \left\| \sup_{x \in B_X} |u(x)| \right\|.$$

Alors  $j$  définit une norme sur  $J(E, X)$  l'espace de tous les opérateurs bornés pour l'ordre de  $E$  dans  $X$ .

**Définition 1.9.** Soit  $X$  un espace de Banach réticulé et soit  $I$  un sous-espace de Banach réticulé de  $X$ . On appelle  $I$  un idéal, si

$$\forall x \in X, \forall y \in I \quad |x| \leq |y| \implies x \in I. \quad (1.9)$$

Et Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in X$ . L'idéal  $I(x_1, \dots, x_n)$  engendré par les points  $(x_1, \dots, x_n)$  est  $\{x \in X, \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad |x| \leq (|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)\}$ .

**Définition 1.10.** Soit  $h : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire borné. On dit que  $h$  est homomorphisme, si

$$\forall x \in X, h(x') = h'(x) \implies h(|x|) = |h(x)|.$$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X, h(\sup \{x, y\}) &= \sup \{h(x), h(y)\}, \\ \text{et } \sup \{x, y\} &= \frac{1}{2} (|x - y| + x + y). \end{aligned}$$

# LES OPÉRATEURS SOUS-LINÉAIRES POSITIFS P-RÉGULIER

---

Dans ce chapitre, on a introduit plusieurs notions et on a définie quelques classes d'opérateurs comme celle de les opérateurs homogènes, les opérateurs positivement homogènes, les opérateurs sous-linéaires et les opérateurs sous-linéaires positifs p-régulier aussi on a inclus le concept de sous-linéaires positifs fortement p-sommants . Pour plus d'informations consulté [6],[11].

## 2.1 Les opérateurs homogènes

### 2.1.1 Les opérateurs positivement homogènes

Dans cette section nous donnerons une aperçu générale sur la classe des opérateurs positivement homogène.

**Définition 2.1.** Soit  $s \in [1, +\infty[$ . Soit  $T$  un opérateur d'un espace de Banach  $X$  dans un autre espace de Banach  $Y$ .  $T$  Est dit  $s$ -positivement homogène opérateur si et seulement si, pour tout  $x$  dans  $X$  et  $(\lambda \in \mathbb{R}_+)$ , on a

$$T(\lambda x) = \lambda^s T(x) \text{ (i.e., } s\text{-positivement homogène).} \quad (2.1)$$

Si  $s = 1$ , c'est un cas de type positivement homogène.

**Remarque 2.1.** Notons que la multiplication d'un opérateur  $s$ -positivement homogène par un nombre réel est aussi un opérateur  $s$ -positivement homogène . La somme de deux opérateurs  $s$ -positivement homogènes est aussi un opérateur  $s$ -positivement homogène . La multiplication de deux opérateurs  $s$ -positivement homogène est un opérateur  $2s$ -positivement homogène. Acceptons les notations suivants :

$$H_s(X, Y) = \{ \text{opérateurs } s\text{-positivement homogènes } T : X \rightarrow Y \}.$$

Si on le menu par l'ordre naturel de  $Y$  et  $Y$  est Banach réticulé, on a  $T_1$  et  $T_2$  sont dans  $H_s(X, Y)$  alors,

$$T_1 \leq T_2 \iff T_1(x) \leq T_2(x), \quad \forall x \in X.$$

Maintenant, on va lancé cette propriété.

**Remarque 2.2.** Soit  $X$  un arbitraire d'espace de Banach . Soient  $Y, Z$  deux espaces de Banach. On a

- (1) Si,  $T$  dans  $H_s(X, Y)$  et  $u$  en  $L(Y, Z)$ . Alors ,  $u \circ T \in H_s(X, Z)$ .
- (2) Si,  $u$  dans  $L(X, Y)^1$  et  $T$  en  $H_s(Y, Z)$ . Alors ,  $T \circ u \in H_s(X, Z)$ .

### 2.1.2 Les opérateurs sous-linéaires

Dans ce paragraphe, nous introduirons une nouvelle classe d'opérateurs qui est la classe des applications sous-linéaires. Elles sont positivement homogènes et sous-additives. Pour plus de détails nous vous référons à [5], [15] . thèse doctorat TIAIBA [17].

**Définition 2.2.** Soit  $X$  un espace vectoriel et  $Y$  un espace vectoriel réticulé. Soit  $T : X \rightarrow Y$ . On dit que  $T$  est un opérateur sous-linéaire, si

$$\forall x \in X, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda x) = \lambda T(x),$$

et

$$\forall x, y \in X, \quad T(x + y) \leq T(x) + T(y).$$

On note par :

$$SL(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \text{ opérateur sous-linéaire de } X \text{ dans } Y\}.$$

**Remarques 2.1.** ,

(i) Soit  $T : E \rightarrow F$ , si  $T \in L(E, F)$ , alors  $T \in SL(X, Y)$ .

(ii) Si  $T$  et  $S$  deux opérateurs sous-linéaires, alors  $T + S$  est un opérateur sous-linéaire.

**Proposition 2.1.** Soient  $X$  un espace vectoriel,  $Y$  un espace vectoriel réticulé,  $T \in SL(X, Y)$ , alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \text{ et } \forall x \in X \quad \lambda T(x) \leq T(\lambda x). \quad (2.2)$$

*Démonstration.* Soient  $\lambda \in \mathbb{R}^*, x \in X$ .

(i) Si  $\lambda > 0$ ,

On a  $T \in SL(X, Y)$ , donc

$$\begin{aligned} \lambda T(x) &= T(\lambda x), \\ &\leq T(\lambda x). \end{aligned}$$

(ii) Si  $\lambda < 0$ .

On a

$$\begin{aligned} 0 &= T(\lambda x - \lambda x) \leq T(-\lambda x) + T(\lambda x), \\ \implies -T(-\lambda x) &\leq T(\lambda x). \end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned} \lambda T(x) &= -(-\lambda T(x)), \\ &= -T(-\lambda x). \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda T(x) \leq T(\lambda x).$$

□

**Proposition 2.2.** Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces vectoriels dont  $Y$  et  $Z$  réticulés.

a) Soit  $T$  dans  $SL(X, Y)$  et  $u$  dans  $L(Y, Z)$  croissant. Alors

$$u \circ T \in SL(X, Z). \quad (2.3)$$

b) Soient  $u$  dans  $L(X, Y)$  et  $T$  dans  $SL(Y, Z)$ . Alors

$$T \circ u \in SL(X, Z). \quad (2.4)$$

*Démonstration.* a) 1) Soient  $x, y$  dans  $X$ . Alors

$$\begin{aligned} u \circ T(x + y) &= u(T(x + y)), \\ &\leq u(T(x) + T(y)), \\ &\leq u \circ T(x) + u \circ T(y). \end{aligned}$$

D'ou

$$u \circ T(x + y) \leq u \circ T(x) + u \circ T(y).$$

2) Soit  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}_+$  et  $x$  dans  $X$ .

$$\begin{aligned} u \circ T(\lambda x) &= u(T(\lambda x)), \\ &= u(\lambda T(x)), \\ &= \lambda(u \circ T)(x). \end{aligned}$$

D'ou

$$u \circ T(\lambda x) = \lambda(u \circ T)(x).$$

Donc

$$u \circ T \in SL(X, Z).$$

b) 1) Soient  $x, y$  dans  $X$ .

$$\begin{aligned} T \circ u(x + y) &= T(u(x + y)), \\ &= T(u(x) + u(y)), \\ &\leq T \circ u(x) + T \circ u(y). \end{aligned}$$

D'ou

$$T \circ u(x + y) \leq T \circ u(x) + T \circ u(y).$$

Donc

$$T \circ u \in SL(X, Z).$$

2) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} T \circ u(\lambda x) &= T(\lambda u(x)), \\ &= \lambda T \circ u(x). \end{aligned}$$

Donc

$$T \circ u \in SL(X, Z).$$

□

**Proposition 2.3.** Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces de Banach dont  $Y$  réticulé,  $C$  une constante positive et  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur sous-linéaire borné. Soit  $v : X \rightarrow Z$  un opérateur linéaire injectif, tel que

$$\|T(x)\| = C \|v(x)\|. \quad (2.5)$$

Alors, il existe  $\tilde{T} : \overline{v(X)} \rightarrow Y$  sous linéaire, tel que

$$T = \tilde{T} \circ v \text{ et } \|\tilde{T}\| \leq C. \quad (2.6)$$

*Démonstration.* On pose

$$\tilde{T}(z) = T(v^{-1}(z)).$$

Cette application est bien définie puisque le noyau de  $v$  est inclus dans le noyau de  $T$  (d'après l'hypothèse  $v(x) = 0 \implies T(x) = 0$ ).  $\tilde{T}$  est sous linéaire. En effet, soient  $z_1, z_2$  dans  $v(X) \subset Z$ , et  $x_1, x_2$  dans  $X$ , tels que  $v(x_1) = z_1$  et  $v(x_2) = z_2$  et  $\lambda > 0$  et

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\lambda z) &= \tilde{T}(\lambda v(x_1)), \\ &= T v^{-1}(\lambda v(x_1)), \\ &= \lambda T(x_1), \\ &= \lambda T(v^{-1}(z_1)), \\ &= \lambda \tilde{T}(z_1). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \tilde{T}(z_1 + z_2) &= T(v^{-1}(z_1 + z_2)), \\ &= T(x_1 + x_2), \\ &= T(x_1) + T(x_2), \\ &= T(v^{-1}(z_1)) + T(v^{-1}(z_2)), \\ &= \tilde{T}(z_1) + \tilde{T}(z_2). \end{aligned}$$



Ce qui implique que

$$\forall x \in X \quad \|T(x)\| = \|\tilde{T}(v(x))\| \leq C \|v(x)\|, \quad (\text{par hypothèse}).$$

Donc

$$\forall z \in v(X) \quad \|\tilde{T}(z)\| \leq C \|z\|.$$

□

### 2.1.3 Les relations entre les opérateurs sous-linéaires et les opérateurs linéaires

**Proposition 2.4.** [5] Soient  $X, Y$  deux espaces vectoriels dont  $Y$  réticulé,  $T \in SL(X, Y)$  et  $X_0$  un sous-espace vectoriel de  $X$ . Soit  $u$  dans  $L(X_0, Y)$ , tel que  $u \leq T$ . Alors

$$\exists \tilde{T} : X \rightarrow Y \text{ sous-linéaire, tel que } \tilde{T}/X_0 = u \text{ et } \tilde{T} \leq T. \quad (2.7)$$

**Corollaire 2.1.** Soit  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur sous-linéaire (pas linéaire). Alors, il existe  $S : X \rightarrow Y$  sous-linéaire, tel que  $S \leq T$ .

**Lemme 2.1.** Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach réticulés et  $T$  dans  $SL(X, Y)$ . Supposons que il existe  $u$  dans  $L(X, Y)$ , tel que  $T \leq u$ . Alors

$$T = u.$$

*Démonstration.*

$$T \leq u \Rightarrow T(x) \leq u(x), \quad \forall x \in X.$$

(En remplaçant  $x$  par  $-x$ ),

$$\begin{aligned} &\Rightarrow T(x) \leq u(x) \leq -T(-x), \quad \forall x \in X, \\ &\Rightarrow T(x) \leq u(x) \leq -T(-x) \leq T(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.1.** [17] (Théorème de Hahn -Banach). Soient  $X, Y$  deux espaces vectoriels dont  $Y$  complètement réticulé,  $T \in SL(X, Y)$  et  $X_0$  un sous-espace vectoriel de  $X$ . Soit  $u$  dans  $L(X, Y)$  tel que  $u \leq T$ . Alors,

$u$  se prolonge en un opérateur linéaire  $\tilde{u} \in L(X, Y)$ , tel que

$$\tilde{u} \leq T. \quad (2.8)$$

**Définition 2.3.** Soient  $X, Y$  deux espaces vectoriels dont  $Y$  réticulé et  $T$  dans  $SL(X, Y)$ . On appelle sous différentiel de  $T$ , l'ensemble

$$\nabla T = \{u \in L(X, Y) \quad u \leq T\}. \quad (2.9)$$

**Lemme 2.2.** Soient  $X, Y$  et  $T$  comme dans la définition (2.3) Alors,  $\nabla T$  est convexe

*Démonstration.* Soient  $u_1, u_2 \in \nabla T$   $\lambda \in [0, 1]$  et  $x \in X$

$$\begin{aligned} ((1 - \lambda) u_1 + \lambda u_2)(x) &= (1 - \lambda)u_1(x) + \lambda u_2(x), \\ &\leq (1 - \lambda)T(x) + \lambda T(x), \\ &\leq T(x). \end{aligned}$$

Donc

$$((1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2) \in \nabla T.$$

Donc  $\nabla T$  est convexe. □

**Proposition 2.5.** Soit  $T$  dans  $SL(X, Y)$ , Alors

(a)

$$\{u(x) \mid u \in \nabla T\} = [-T(-x), T(x)].$$

Où la notation  $[\cdot, \cdot]$  désigne l'intervalle d'ordre.

(b) Pour tout  $x$  dans  $X$  il existe  $u_x \in \nabla T$ , tel que

$$T(x) = u_x(x), \quad \left\{ i.e., T(x) = \sup_{u \in \nabla T} u(x) \right\}.$$

**Théorème 2.2.** [15] Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach dont  $Y$  complètement réticulé et  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur sous linéaire continu. Alors,

- (i)  $\|T\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u\| \leq 2 \|T\|$ .
- (ii)  $\forall x \in X \sup_{u \in \nabla T} \{\|T(x)\|, \|T(-x)\|\} \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|$ .

**Corollaire 2.2.** Soit  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur sous-linéaire entre deux espaces de Banach  $X, Y$  dont  $Y$  réticulé. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i)  $T$  continu,
- (ii)  $\forall u \in \nabla T, u$  est continu.

### 2.1.4 Les opérateurs sous-linéaire p-convexe et p-concave

**Définition 2.4.** Soient  $E$  un espace de Banach arbitraire,  $X$  un espace de Banach réticulé et soient  $1 \leq p < +\infty$ ,  $T : E \rightarrow X$  un opérateur sous-linéaire. On dit que  $T$  un opérateur sous-linéaire p-convexe, si  $\exists c > 0$  ( $c$  est une constante)  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Les opérateurs  $T_n : l_p^n(E) \rightarrow X(l_p^n)$  tels que  $T_n(x_1 \dots x_n) \rightarrow (T(x_1), \dots, T(x_n))$ . Sont uniformément bornés par  $c$ .

**Définition 2.5.** Soient  $E$  un espace de Banach arbitraire,  $X$  un espace de Banach réticulé et soient  $1 \leq p < +\infty$ ,  $T : E \rightarrow X$  un opérateur sous-linéaire. On dit que  $T$  un opérateur sous-linéaire p-concave, si  $\exists c > 0$ , ( $c$  est une constante)  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Les opérateurs  $T_n : X(l_p^n) \rightarrow l_p^n(E)$  tels que  $T_n(x_1 \dots x_n) \rightarrow (T(x_1), \dots, T(x_n))$ . Sont uniformément bornés par  $c$ .

**Remarques 2.2.** ,

(i) Un espace de Banach réticulé  $X$  est p-convexe (resp. p-concave), si  $(id_x)$  est p-convexe (resp. p-concave).

(ii) Tout opérateur sous-linéaire p-convexe (resp. p-concave) est borné. Et  $\|T\| \leq c^p(T)$  (resp.  $\|T\| \leq c_p(T)$ ).

Tel que  $c^p(T)$  est la plus petite constante  $c$  vérifier ces propriétés de p-convexe. Et  $c_p(T)$  est la plus petite constante  $c$  qui vérifier ces propriétés de p-concave.

(iii) Tout espace de Banach est 1-convexe et  $\infty$ -concave.

L'opérateur sous-linéaire p-convexe et l'opérateur sous-linéaire p-concave pour  $1 \leq p \leq +\infty$  sont décroissants et croissants avec  $p$  respectivement.

**Exemple 2.1.** L'espace  $L_p$  pour  $1 \leq p < +\infty$  est p-convexe et p-concave et  $c^p(L_p) = c_p(L_p) = 1$ .

## 2.2 Les opérateurs sous-linéaires positifs

**Définition 2.6.** Soit  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur sous-linéaire et dit positif, si

$$\forall x \in X, \quad T(x) \geq 0.$$

On note par

$$SL^+(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \text{ opérateur sous-linéaire positif}\}.$$

**Remarque 2.3.** Soit  $u \in L(E, F)$ , alors  $|u|$  est un opérateur sous-linéaire positif.

**Définition 2.7.** Soit  $T \in SL^+(X, Y)$ . On dit que  $T$  est borné ou continue, si

$$\forall x \in X, \quad \exists c > 0, \quad \|T(x)\| \leq c \|x\|. \quad (2.10)$$

tel que

$$\|T\| = \sup_{x \in B^x} \|T(x)\|$$

.

**Proposition 2.6.** Soient  $X$  un espace Banach,  $Y$  un espace Banach réticulé et  $T \in SL(X, Y)$ , alors

$$\begin{aligned} T \text{ continue} &\iff T \text{ continue en } 0, \\ &\iff \exists c > 0, \forall x \in X, \|T(x)\| \leq c \|x\|. \end{aligned}$$

De plus  $T$  est borné.

*Démonstration.* (1)  $T$  continue  $\implies T$  continue en 0 ? (évidente).

(2)  $T$  continue en 0  $\implies \exists c > 0, \forall x \in X, \|T(x)\| \leq c \|x\|$ , de plus  $T$  est borné.  
soit  $T \in SL(X, Y)$  continue en 0, donc

$$\exists \beta > 0, \forall x (\neq 0) \in X, \|x\| \leq \beta \implies \|T(x)\| \leq 1$$

. On pose  $y = (\frac{x}{\|x\|})\beta$ , alors

$$\begin{aligned} \|T(y)\| \leq 1 &\implies \left\| T\left(\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\beta\right) \right\| \leq 1, \\ &\implies \frac{\beta}{\|x\|} \|T(x)\| \leq 1, \\ &\implies \|T(x)\| \leq \frac{1}{\beta} \|x\|. \end{aligned}$$

On pose  $c = \frac{1}{\beta}$ , alors

$$\|T(x)\| \leq c \|x\|$$

. (3)  $T$  continue  $\implies \exists c > 0, \forall x \in X$ , et  $\|T(x)\| \leq c \|x\|$ , de plus  $T$  est borné.

Supposons que  $\exists c > 0, \forall x \in X$ , et  $\|T(x)\| \leq c \|x\|$ .

Donc  $\forall x_0 \in X$ , on a

$$\begin{cases} T(x) \leq T(x - x_0) + T(x_0) &\implies T(x) - T(x_0) \leq T(x - x_0), \\ T(x_0) \leq T(x_0 - x) + T(x) &\implies T(x_0) - T(x) \leq T(x_0 - x). \end{cases}$$

Donc  $\forall x \in X$ ,

$$\begin{aligned} |T(x) - T(x_0)| &\leq |T(x - x_0)| + |T(x_0 - x)|, \\ \|T(x) - T(x_0)\| &\leq \|T(x - x_0)\| + \|T(x_0 - x)\|, \\ &\leq 2c \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Donc  $T$  est continue. □

**Définition 2.8.** Soit  $T \in SL(X, Y)$ , on dira que  $T$  est symétrique, si

$$\forall x \in X, T(x) = T(-x).$$

De plus, si  $X$  est réticulé, alors  $T$  est croissant.

$$(e.i., \forall x, y \in X \ x \leq y \implies T(x) \leq T(y)).$$

**Proposition 2.7.** Soient  $E, X$  deux espaces de Banach réticulé et  $T \in SL(E, X)$ . On a

$$T \text{ est symétrique} \implies T \text{ est positif } (T \geq 0)$$

*Démonstration.*  $\forall x \in X$ ,

$$T(x - x) = 0$$

.

$$\begin{aligned} \implies T(x - x) &\leq T(x) + T(-x), \\ &\leq T(x) + T(x), \\ &= T(x). \end{aligned}$$

Donc  $T$  est positif ( $T \geq 0$ ). □

**Lemme 2.3.** Soit  $T \in SL(X, Y)$  une partie croissant, si  $|T|$  il existe. Alors

$$|T(x)| \leq |T|(|x|).$$

*Démonstration.* On a

$$x \leq |x| \text{ et } x \leq |-x|.$$

Et

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad T(x) &\leq T(|x|). \\ \forall x \in X, \quad -T(x) &\leq T(-x). \\ &\leq T(|x|). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad |T(x)| &\leq T(|x|), \\ &\leq |T|(|x|). \end{aligned}$$

□

Nous étudions maintenant la continuité d'un opérateur sous-linéaire positif croissant. Nous adaptons le même démonstration comme dans le cas linéaire voir [4, 16]

**Théorème 2.3.** [6] Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur sous-linéaire positif et croissant, alors  $T$  est continue.

*Démonstration.* On suppose que  $T$  est continue.

Donc  $\exists (x_n) \in E$ , tel que  $\|x_n\| = 1$ .

On pose

$$\|T(x_n)\| \geq n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a

$$|T(x)| \leq T(|x|).$$

Donc pour  $x_n \geq 0$ ,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\|x_n\|}{n^2} \prec +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme  $E$  est complète, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n^2}$  convergence en norme sur  $E$ .

Soit  $x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n^2}$ , tel que  $0 \leq \frac{x_n}{n^2} \leq x$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Comme  $T$  est croissant. On a

$$T\left(\frac{x_n}{n^2}\right) \leq T(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\|T\left(\frac{x_n}{n^2}\right)\| \leq \|T(x)\| \leq +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par la monotonie de la norme de  $F$ , donc c'est une contradiction. Alors  $T$  est continue.  $\square$

## 2.3 Les opérateurs sous-linéaires positifs p-régulier

**Définition 2.9.** Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur sous-linéaire positif et borné. On dit que  $p$ -régulier, si  $\exists C > 0, \forall (x_i)_{i=1}^n \in E$  et  $1 \leq p < +\infty$ . On a

$$\left\| \left( \sum_{i=1}^n |T(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_F \leq C \left\| \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_E. \quad (2.11)$$

On note

$$\rho_p^+(E, F) = \{ T : E \rightarrow F \text{ opérateur sous-linéaire positif } p\text{-régulier} \}$$

$$\rho_p^+(T) = \inf \{ C > 0 \text{ est } C \text{ vérifie l'inégalité 2.11} \}.$$

**Proposition 2.8.** [6] Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Les deux propositions sont équivalentes

(i)  $F$  Est  $p$ -concave,

(ii) Les opérateurs sous-linéaires positifs  $p$ -réguliers  $T : E \rightarrow F$  est  $p$ -concave.

*Démonstration.* (ii)  $\implies$  (i) Pour  $E = F$  et  $T = id_x$  alors  $F$  est  $p$ -concave.

(i)  $\implies$  (ii) Donc  $F$  est  $p$ -concave i.e.,

$\forall (f_1, \dots, f_n) \in F$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^n \|f_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta \left\| \left( \sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|.$$

Donc  $\forall (x_1 \dots x_n) \in E$ ,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \beta \left\| \left( \sum_{i=1}^n |T(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|, \\ &\leq \beta \|T\| \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \alpha \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Tel que  $\alpha = \beta \|T\|$ .

Alors  $T$  p-concave. □

**Proposition 2.9.** [6] Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Les deux propositions sont équivalentes,

(i)  $E$  est p-convexe.

(ii) Les opérateurs sous-linéaires positifs p-réguliers  $T : E \rightarrow F$  est p-convexe.

*Démonstration.* (i)  $\implies$  (ii), Car  $E$  est p-convexe (i.e.).

$\forall (x_1 \dots x_n) \in E$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| &\leq \|T\| \left\| \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|, \\ &\leq \alpha \|T\| \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Alors  $T$  p-convexe. □

## 2.4 Les opérateur sous-linéaires positifs fortement p-sommants

**Définition 2.10.** Soient  $E$  un espace de Banach,  $F$  un espace de Banach réticule. Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur sous-linéaire. On dit que  $T$  est fortement p-sommant ( $1 \leq p < +\infty$ ), si il existe une constante  $C > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall (x_1 \dots x_n) \in E$ ,  $\forall (y_1^* \dots y_n^*) \in F_+^*$ . On a

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|(x_i)\|_{l_p^n(E)} \sup_{y \in B_F} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^{n\omega}}. \quad (2.12)$$

On note

$$D_p^+(E, F) = \{ T : E \rightarrow F \text{ un opérateur sous-linéaire positif fortement p-sommants} \}.$$

$$d_p^+(T) = \{ C > 0 \text{ est } C \text{ vérifie l'inégalité 2.12} \}.$$

**Remarque 2.4.** Pour  $p = 1$ . On a  $D_1^+(E, F) = SB^+(E, F)$ .

**Théorème 2.4.** [12] Soient  $E$  un espace de Banach,  $F$  un espace de Banach réticule. On a  $T \in SB^+(E, F)$  est fortement  $p$ -sommants ( $1 \leq p < +\infty$ ), si il existe une constante  $C > 0$  et  $\mu \in B_{F_+^{**}}$  un mesure de probabilité de Radon, on a

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C \|x\| \left( \int_{B_{F_+^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$



## LES OPÉRATEURS SOUS-LINÉAIRES POSITIFS COHEN P-NUCLÉAIRE

---

Dans ce chapitre, on va cité la classe des opérateurs sous linéaire positifs Cohen p-Nucléaire. La dont et comme résultat principal on va mentionné le théorème de domination de Piescht pour ce type d'opérateurs. Pour plus d'informations consulté [6],[9],[2],[7],[11].

### 3.1 Les opérateurs sous-linéaires Cohen p-Nucléaires

#### 3.1.1 Les opérateur sous-linaires positif p-sommants

A travers ce sous-section, nous rappelons la définition de Les opérateur sous-linaires positif p-sommants, en utilisant [6], qui a été d'abord indiqué dans le cas linéaire par Blasco dans [7]. Pour la définition de p-sommant et des propriétés associées, le lecteur peut voir [2] .

**Définition 3.1.** Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur sous-linaire positif, on dit que  $T$  est p-sommant tel que  $1 \leq p < +\infty$ , si  $\exists C > 0$  une constante,  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall (x_1 \dots x_n) \in E$ . On a

$$\|T(x_i)\|_{l_p^n(F)} \leq C \|x_i\|_{l_p^n(E)}. \quad (3.1)$$

On note

$$S\Pi_p^+(E, F) = \{T : E \rightarrow F \text{ opérateur sous-linaires positif p-sommants}\}.$$

$$\pi_p^+(T) = \inf \{C > 0, \text{ est } C \text{ vérifie l'inégalité 3.1}\}.$$

**Théorème 3.1.** [6]. Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur sous-linaire positif borne, on dit que est p-sommant ( $1 \leq p < +\infty$ ), si il existe une constante  $C > 0$  et il existe  $\mu$  un mesure probabilité tel que  $\mu \in (B_{E^*}^+)$ . On a

$$\|T(x)\| \leq C \left( \int_{B_{X^*}^+} (|x|(x^*))^p d\mu(X^*) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Démonstration.* C'est sémilaine au cas linéaire [voir [7]]. □

#### 3.1.2 les opérateurs sous-linaires positif p-Nucléaires

A travers ce sous-section, nous présentons l'extension suivante à la classe des opérateurs Cohen p-nucléaires. Nous donnons le théorème de domination pour ce catégorie. Pour plus d'informations consulté [6]

**Définition 3.2.** Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur sous-linaire positif et borné. On dit que p-Nucléaires pour  $1 \leq p < +\infty$  si  $\exists C > 0$  une constante et  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $(x_1 \dots x_n) \in E, (y_1^* \dots y_n^*) \in F^{*+}$ . On a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i, y_i^*) \rangle \right| \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n (|x_i|(x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \times \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left( \sum_{i=1}^n (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (3.2)$$

De plus, on note

$$SN_p^+(E, F) = \{T : E \rightarrow F \text{ un opérateur sous-linaire positif p-Nucléaires}\}.$$

$$n_p^+(T) = \inf \{C > 0, \text{ est } C \text{ vérifie l'inégalité 3.2}\}.$$

**Remarque 3.1.** Si  $p = 1$ , on a

- (i)  $S\Pi_1^+(E, F) = SN_1^+(E, F)$ ,
- (ii)  $SN_1^+(E, F)$  est un espace de Banach.

**Définition 3.3.** [11] Soit  $X$  un espace de Banach,  $Y$  un espace de Banach réticule, et soit  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur sous-linéaire positif  $T$  dit Cohen p-Nucléaire ( $1 < p < +\infty$ ), si il existe une constante  $C > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in X$ ,  $(y_1^*, \dots, y_n^*) \in Y_+^*$ . On a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}^+} \|x^*(x_i)\|_{l_p^n} \sup_{y \in B_Y^+} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n}. \quad (3.3)$$

On note par

$$N_p^+(X, Y) = \{T : E \rightarrow F \text{ un opérateur sous-linéaire positif Cohen p-Nucléaires}\}.$$

$$\eta_p^+(T) = \inf \{C > 0, \text{ est } C \text{ vérifie l'inégalité 3.3}\}.$$

**Définition 3.4.** Soient  $T \in SB^+(E, F)$ ,  $v : l_p^n \rightarrow F_+^*$  un opérateur linéaire et borné, l'opérateur sous-linéaire positif et borné  $T$  dit Cohen p-Nucléaire, si il existe une constante  $C > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in E$ . On a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), v(e_i) \rangle \right| \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}^+} \|x^*(x_i)\|_{l_p^n} \|v\|. \quad (3.4)$$

Telle que  $e_i$  la base canonique de  $l_p^n$ .

**Remarque 3.2.** Les deux définitions (3.2) et (3.3) sont équivalente, si pour tout opérateur sous-linéaire positif  $T : X \rightarrow Y$  on a  $Y$  est réflexif.

**Proposition 3.1.** soient  $X$  un espace de Banach réticulé,  $Y$  un espace de Banach complètement réticulé. Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire borné de  $X$  dans  $Y$ .

Supposons que  $T$  soit positif Cohen p-nucléaire. Alors pour tout opérateur sous-linéaire borné  $S$ , tel que  $S \leq T$ ,  $S$  est positif Cohen p-nucléaire.

*Démonstration.* Soient  $x_i \in X_1$ ,  $y_i^* \in Y_+^*$ , que applique (1.7), il existe

$$\langle S(x_i), y_i^* \rangle \leq \langle T(x_i), y_i^* \rangle.$$

Utiliser [[11] (2 2)], L'esprit

$$-\langle S(x_i), y_i^* \rangle \leq \langle T(-x_i), y_i^* \rangle.$$

Donc pour  $1 \leq i \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle S(x_i), y_i^* \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n \sup \{ \langle T(x_i), y_i^* \rangle, \langle T(-x_i), y_i^* \rangle \}, \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup \{ |\langle T(x_i), y_i^* \rangle|, |\langle T(-x_i), y_i^* \rangle| \}, \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| + \sum_{i=1}^n |\langle T(-x_i), y_i^* \rangle|. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n |\langle S(x_i), y_i^* \rangle| \leq 2\eta_p^+(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|x^*(x_i)\|_{l_p^n} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{l_p^n}.$$

Alors  $S$  est positif Cohen  $p$ -nucléaire et

$$\eta_p^+(S) \leq 2\eta_p^+(T).$$

Ainsi, nous avons fini preuve.  $\square$

**Remarque 3.3.** Si  $S, T$  sont des opérateurs sous-linéaires, nous n'avons pas de réponse.

**Corollaire 3.1.** Soient  $T$  un opérateur sous-linéaire positif Cohen  $p$ -nucléaire, pour tout  $u$  dans  $\nabla T$ , si

$$u \in N_p^+(X, Y) \Rightarrow u^* \in S\Pi_{p^*}^+(X, Y). \quad (3.5)$$

Tel que  $p, p^*$ , sont conjugué.

*Démonstration.* Soient  $T$  un opérateur sous-linéaire positif Cohen  $p$ -nucléaire, pour tout  $u$  dans  $\nabla T$ , si  $u \in N_p^+(X, Y)$ . que applique la proposition (3.1) (remplacer  $S$  par  $u$ ). Si  $u$  est un opérateur sous-linéaire positif Cohen  $p$ -nucléaire, donc par [[11], **Théorème 4 1**]  $u$  est un opérateur sous-linéaire positif  $p$ -sommant. Alors par [[9], **Théorème 2 2 1**]  $u^*$  est un opérateur sous-linéaire positif  $p^*$ -sommant.  $\square$

**Théorème 3.2.** Soient  $X$  un espace de Banach,  $E, F$  deux espaces de Banach réticulé, soit  $T \in SB^+(X, E)^1$  est  $u$  un opérateur positif tel que  $u \in B(E, F)^2$  et  $v \in B(Y, X)$

(i) si  $T$  est Cohen  $p$ -Nucléaire, alors  $u \circ T$  est un opérateur sous-linaire positif Cohen  $p$ -Nucléaire, et

$$\eta_p^+(u \circ T) \leq \|u\| \eta_p^+(T).$$

(ii) si  $T$  est Cohen  $p$ -Nucléaire alors  $T \circ v$  est un opérateur sous-linaire positif Cohen  $p$ -Nucléaire, et

$$\eta_p^+(T \circ v) \leq \|v\| \eta_p^+(T).$$

*Démonstration.* (i) Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in E$ ,  $(z_1^*, \dots, z_n^*) \in Z_+^*$  on preuve que,

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle uT(x_i), z_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|x^*(x_i)\|_{l_p^n} \|v\|.$$

On a  $v: Z \rightarrow l_{p^*}^n$ , tel que  $v(z) = \sum_{i=1}^n z_i^*(z) e_i$ .

Donc

1.  $SB^+(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ un opérateur sous-linéaire positif bornée}\}.$
2.  $B(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ un opérateur bornée}\}.$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n \langle uT(x_i), z_i^* \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), u^*(z_i^*) \rangle \right|, \\
&\leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|x^*(x_i)\|_{l_p^n} \|w\|, \\
&\leq \eta_p^+(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|x^*(x_i)\|_{l_p^n} \|w\|.
\end{aligned}$$

Tel que

$$\begin{aligned}
w(y) &= \sum_{i=1}^n \langle u^*(z_i^*), y \rangle e_i, \\
&= \sum_{i=1}^n \langle (z_i^*), u(y) \rangle e_i, \\
&= \|u(y)\| \sum_{i=1}^n \left\langle (z_i^*), \frac{u(y)}{\|u(y)\|} \right\rangle e_i.
\end{aligned}$$

D'ou implique que

$$\begin{aligned}
\|w\| &\leq \|u\| \sup_{y \in B_Y} \|(z_i^*(z))_{1 \leq i \leq n}\|, \\
&\leq \|u\| \|v\|.
\end{aligned}$$

(ii) Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(e_1 \dots e_n) \in E$  et  $(y_1^* \dots y_n^*) \in F_+^*$ . On a

$$\begin{aligned}
\left| \sum \langle T \circ S(e_i), y_i^* \rangle \right| &\leq \eta_p^+(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n |\langle S(e_i), x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v\|, \\
&\leq \eta_p^+(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}^+} \|S^*(x^*)\| \left( \sum_{i=1}^n \left| \left\langle e_i, \frac{S^*(x^*)}{\|S^*(x^*)\|} \right\rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v\|, \\
&\leq \eta_p^+(T) \|S\| \sup_{x^* \in B_{X^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n |\langle e_i, e^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v\|.
\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.3.** (Théorème de composition)

Soient  $X$  un espace de Banach,  $E, F$  deux espaces de Banach réticulés,  $T \in SB^+(X, E)$  est un opérateur positif, tel que  $u \in B(E, F)$  et  $v \in B(Y, X)$ .

(i) Si  $T$  est Cohen  $p$ -Nucléaire alors  $u \circ T$  est un opérateur sous-linaire positif  $p$ -Nucléaire, et

$$n_p^+(u \circ T) \leq \|u\| \eta_p^+(T).$$

(ii) Si  $T$  est Cohen  $p$ -Nucléaire alors  $T \circ v$  est un opérateur sous-linaire positif  $p$ -Nucléaire, et

$$n_p^+(T \circ v) \leq \|v\| \eta_p^+(T).$$

*Démonstration.* Avoir même preuve que la théorème précédent (3.2) □

**Théorème 3.4.** Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur sous-linaire positif borné. Les deux propositions sont équivalents

(i) l'opérateur  $T \in SN_p^+(E, F)$ .

(ii) Puer  $Z$  un espace de Banach, on a  $u : E \rightarrow Z$  un opérateur sous-linaire positif  $p$ -sommant, et  $v : Z \rightarrow F$  un opérateur positif  $p$ -sommant tel que  $T = uv$ .

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) On considère l'opérateur

$$\begin{aligned} u_0 : X &\rightarrow L^p(B_{X^*}^+, \mu), \\ x &\rightarrow \langle |x|, \cdot \rangle. \end{aligned}$$

On note

$$\forall x \in X, \|T_x\| \leq C \|u_0(x)\|.$$

Soit  $Z$  un sous-espace fermé dans  $L_p(\mu)$ , tel que

$$Z = \overline{u_0(X)}.$$

Soit  $u : X \rightarrow Z$  un opérateur induite. On dit que  $u$  un opérateur sous-linaire positif  $p$ -sommant, avec

$$\pi_p^+(T) \leq 1.$$

et écrivons  $T = vu$  pour tout  $v \in l(Z, F)$ ,  $y^* \in F^{*+}$ . On a

$$\begin{aligned} \|v^*(y^*)\| &= \sup \{ |\langle u(x), v^*(y^*) \rangle| \} : \|u(x)\|_p \leq 1, \\ &= \sup \{ |\langle T(x), y^* \rangle| \} : \int_{B_{X^*}^+} |\langle x^*, |x| \rangle|^p d\mu(x^*) \leq 1, \\ &\leq C \left( \int_{B_{F^{**}}^+} |\langle y^{**}, y^* \rangle|^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Par le théorème de domination de Pietsch, et pour

$$v^* \in \Pi_{p^*}^+(F^*, Z^*), \pi_{p^*}^+(v^*).$$

Donc, qui implique que

$$v \in \rho_p^+(Z, F).$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Soient  $x_1 \dots x_n \in E, y_1^* \dots y_n^* \in F^{*+}$ . On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \langle vu(x_i), y_i^* \rangle \right|, \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \langle u(x_i), v^*(y_i^*) \rangle \right|, \\ &\leq C \left( \sum_{i=1}^n \int_{B_{E^*}^+} (|x_i| (x^*))^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}, \\ &\leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n (|x_i| (x^*))^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left( \sum_{i=1}^n (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Alors l'opérateur

$$T \in SN_p^+(E, F).$$

□

## 3.2 Application

Le principal résultat de cette section est la prochaine extension du théorème de domination de Pietsch à cette classe d'opérateurs.

Pour prouvé, nous utiliserons le théorème (3.4). Dans [12], Achour et al. utilisé le lemme de Ky Fan pour prouver le théorème de domination.

**Théorème 3.5.** *Les deux propositions sont équivalente,*

(i)  $T : E \rightarrow F$  et un opérateur sous-linéaire positif et de Cohen  $p$ -Nucléaire et

$$\eta_p^+(T) \leq C$$

(ii) Il existe une constante  $C > 0$ , et soient  $\mu_1, \mu_2$  deux mesures de Radon positif, tel que  $\mu_1 \in B_{E^*}^+$  et  $\mu_2 \in B_{F^{**}}^+, \forall x \in X, y^* \in F^{*+}$ . On a

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C \left( \int_{B_{E^*}^+} (|x| (x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{F^{**}}^+} (y^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.6)$$

*Démonstration.* (ii)  $\implies$  (i) soient  $x_1 \dots x_n \in E, y_1^* \dots y_n^* \in F^{*+}$ , on a

$$|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left( \int_{B_{E^*}^+} (|x_i| (x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Donc pour la somme, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| &\leq C \sum_{i=1}^n \left( \int_{B_{E^*}^+} (|x_i| (x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}, \\
 &\leq C \left( \sum_{i=1}^n \int_{B_{E^*}^+} (|x_i| (x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}, \\
 &\leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n (|x_i| (x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left( \sum_{i=1}^n (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.
 \end{aligned}$$

Alors  $T$  est un opérateur sous linéaire positif  $p$ -Nucléaire .

(i)  $\implies$  (ii)  $T \in SN_p^+(E, F)$ , Ainsi selon ce qui précède  $T = uv$  où  $u \in S\Pi_p^+(E, X)$  et  $v \in D_p^+(X, F)$ , donc pour [[1] **Théorème 4.13**] il existe une constante  $C > 0$ , et soient  $\mu_1, \mu_2$  deux mesures de Radon positif tels que  $\mu_1 \in B_{E^*}^+$  et  $\mu_2 \in B_{F^{**}}^+$  et  $\forall x \in X, y^* \in F^{*+}$ . On a

$$\begin{aligned}
 |\langle T(x), y^* \rangle| &= |\langle uv(x), y^* \rangle|, \\
 &= |\langle u(x), v^*(y^*) \rangle|, \\
 &\leq \|u(x)\| \|v^*(y^*)\|, \\
 &\leq C \left( \int_{B_{E^*}^+} (|x| (x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{F^{**}}^+} (y^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.
 \end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant prêts à utilisant le théorème "Grothendieck-Maurey" dans le cas sous-linéaire positif.

**Théorème 3.6.** Soient  $E, F$  et  $G$  trois des espaces de Banach réticules, où  $G$  est un espace 2-concave. Soient  $T : \mathbb{C}(\mathbb{K}) \rightarrow E$  est un opérateur sous linéaire positif 2-régulier,  $w : E \rightarrow F$  est un opérateur positif 2-concave,  $v : F \rightarrow G$  est un opérateur sous linéaire positif fortement 2-sommant, alors  $v \circ w \circ T$  est un opérateur sous linéaire positif Cohen 2-Nucléaire, et

$$\eta_p^+(v \circ w \circ T) \leq d_2^+(v) C_2^+(w) \rho_2^+(T).$$

*Démonstration.* Soient  $T : \mathbb{C}(\mathbb{K}) \rightarrow E$  est un opérateur sous linéaire positif 2-régulier,  $w : E \rightarrow F$  est un opérateur positif 2-concave,  $v : F \rightarrow G$  en utilisant [[2], **Théorème 3.6**], il existe

$$w \circ T \in S\Pi_2^+(\mathbb{C}(\mathbb{K}), F).$$

alors par. [Théorème (3.4) ], alors  $v \circ w \circ T$  est un opérateur sous linéaire positif Cohen 2-Nucléaire, et

$$\eta_p^+(v \circ w \circ T) \leq d_2^+(v) C_2^+(w) \rho_2^+(T).$$

□



**Proposition 3.2.** *On a*

$$SN_p^+(E, F) \subseteq S\Pi_p^+(E, F) \text{ et } \pi_p^+(T) \leq n_p^+(T). \quad (3.7)$$

*Démonstration.* Soit  $T$  un opérateur dans  $SN_p^+(E, F)$ , donc  $\forall x \in E$  on a

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sup_{y^* \in B_{F^*}^+} |\langle T(x), y^* \rangle|, \\ &\leq \sup_{y^* \in B_{F^*}^+} n_p^+(T) \left( \int_{B_{E^*}^+} (|x_i|(x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}, \\ &\leq \sup_{y^* \in B_{F^*}^+} n_p^+(T) \left( \int_{B_{E^*}^+} (|x_i|(x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^* \in B_{F^*}^+} \|y^*\|, \\ &\leq \sup_{y^* \in B_{F^*}^+} n_p^+(T) \left( \int_{B_{E^*}^+} (|x_i|(x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Donc  $T$  est un opérateur sous-linéaire positif  $p$ -sommant, et

$$\pi_p^+(T) \leq n_p^+(T).$$

□

---

# Bibliographie

---

- [1] D. Achour and A. Belacel. Domination and factorization theorems for positive strongly  $p$ -summing operators. *Positivity*, 18 :2014, 785-804.
- [2] D. Achour and L. Mezrag. Little grothendieck theorem for sublinear operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 296 :2004, 541-552.
- [3] D. Achour and L. Mezrag. Factorisation des opérateurs sous-linéaires par  $l_{p^\infty}(\omega, \nu)$  et  $l_{q^1}(\omega, \nu)$ . *Ann. Sci. Math.*, 26 :Quebec 26 (2002) 2, 109-121. ( in French).
- [4] D. H. Alipantis and O. Burkinshawi. *Positive Operators*. Academic Press, INC (1985).
- [5] R. PALLU. DE LA BARRIERE. *Convez analysis vector and sef-valued measures*. Pub. Univ. Paris VI 33, (1980).
- [6] A. Belacell. On the cohen  $p$ -nuclear positive sublinear operators. *J. Mat*, 4 :(4)(2016), 556-564.
- [7] O. Blasco. A class of operators from a banach lattice into a banach space. *Collect. Mathl*, 37 :1986, 13-22.
- [8] O. Blasco. Positive  $p$ -summing operators from  $l_p$ -spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31 :1988, 275-280.
- [9] J. S. Cohen. Absolutely  $p$ -summing,  $p$ -nuclear operators and their conjugates. *Math. Ann.*, 201 :1973, 177-200.
- [10] L. Mezrag D. Achour. Sur les opérateurs sous-linéaires  $p$ -lattice sommants. page Tom XIV (2007), 237-250.
- [11] L. Mezrag D. Achour and K. Saadi. On the cohen  $p$ -nuclear sublinear operators. *Journal of inequalities in pure and applied mathematics.*, Vol. 10 :2009, Issue 2, Article 46, 13pp.
- [12] L. Mezrag D. Achour and A. Tiaiba. On the strongly  $p$ -summing sublinear operators. *Taiwanese Journal of Mathematics.*, 11(4) :2007, 959-973.
- [13] J. L. Krivine. *Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés*. Séminaire Maurey-Schwartz 1973 -1974, exposés 22 et 23, École Polytechnique. Paris.
- [14] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I and II*. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [15] M. T. BELAIB L. Mezrag. Sur les opérateurs sous-linéaires  $p$ -sommants. *Sci. Tech.*, page 15(2001), 7-11.
- [16] H. Schaefer. *Banach lattices and Positive Operators*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1974).
- [17] A. Tiaiba. *These doctorat en sciences, les operateurs sous-lineaires  $L_p$ -sommants version commutative et non commutative*. Universitte Hadj Lakhdar Batna (Algerie), (29-11-2006).
- [18] A. C. Zaanen. *Introduction to operator theory in Riesz space*. SpringerVerlag, (1997).

---

### الملخص بالعربية

تحتوي هذه الأطروحة على دراسة مفصلة للعمل الذي قام به Belacel وذلك عام 2016 والذي يعمم احد مفاهيم العوامل المتجانسة خاصة فئة مشغلي كوهن النووي ة للمشاعل الخطية الايجابية كنتيجة رئيسية تظهر أن هذا النوع من العمليات لتحقق من نظرية هيمنة بيتش.

الكلمات المفتاحية: المثالية – التجانس – العوامل المتجانسة – بناخ شبكي – مشغلي الخط الفرعي – كوهن النووي .

---

### Résumé

Dans cet mémoire contenant une étude en détail d'un travail de A. BELACEL en 2016 qui généralise l'un des concepts des opérateurs homogène en particulier la classe des opérateurs Cohen p-nucléaire au opérateurs sous linéaire positifs. Comme résultat principal il montre que ce type d'opérateurs vérifier le théorème de domination de Pietsch.

**Mots-Clés :** Banach réticulé, Cohen p-Nucléaires, Idéal, homomorphisme, opérateurs homogènes, opérateurs sous-linéaires.

---

### Abstract

In this, containing a detailed study of a work by A. BELACEL in 2016 which realizes one of the concepts of homogeneous operators especially the class of Cohen p-nuclear positive linear operators. As a main result it shows that this type of operators to check Pietsch's domination theorem.

**Keywords :** Banach lattice, Cohen p-Nuclear, Homomorphism, Homogeneous operators, Ideal, Sublinear operators, ..